5. osztály

1. feladat:

Anna és Tamás egy 7x10 kisnégyzetből álló tábla csokoládén osztozik. Felváltva törnek vagy egy sort vagy egy oszlopot a táblából, amíg elfogy.
Ha Anna vesz először, milyen stratégiája kell legyen, ha azt szeretné, hogy neki több csoki jusson, mint Tamásnak?

Megoldás:
A nyerő stratégiához a sorok és az oszlopok száma páros kell legyen. Első alkalommal 1x10-es sort tör le Anna. Folytatásban ugyanannyit tör le, mint Tamás. A fennmaradó részt egyenlően osztják el

Koczinger Éva, Szatmárnémeti

2. feladat:

„Hepehupa” számnak nevezzük azt a tízes számrendszerbeli többjegyű számot, amelyben a második számjegy nagyobb az elsőnél, a harmadik kisebb a másodiknál, a negyedik nagyobb a harmadiknál, az ötödik kisebb a negyediknél, és így tovább, és „hupahepe” számnak nevezzük azt a tízes számrendszerbeli többjegyű számot, amelyben a második számjegy kisebb az elsőnél, a harmadik nagyobb a másodiknál, a negyedik kisebb a harmadiknál, az ötödik nagyobb a negyediknél, és így tovább. Legyen x a legnagyobb, tíz különböző számjegyből álló „hepehupa” szám és y a legkisebb, tíz különböző számjegyből álló „hupahepe” szám.

a) Számítsd ki az $x-y$ különbséget!
b) Igazold, hogy az $\frac{x}{y}$ tört nem irreducibilis!
c) Adj példát olyan különböző számjegyekből álló ötjegyű „hepehupa” számra, melynek kétszerese viszont „hupahepe” szám!

Mikó Ágnes, Sepsiszentgyörgy

Megoldás:

a) a) $x=8967452301$, $y=1032547698$ ezért $x-y=7934904603$

b) Az $\frac{x}{y}$ tört egyszerűsíthető, mivel a számláló és a nevező is osztható 9-cel, mert

mindkettőben a számjegyek összege 45.

Megjegyzések:
- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár

c) Ha $x = 36452$, akkor $2x = 72904$.

3. feladat:

Zsófi születésnapi buliján a résztvevők átlagéletkora 8 évről 9 évre emelkedett, amikor egy 13 éves újabb vendég csatlakozott hozzájuk.

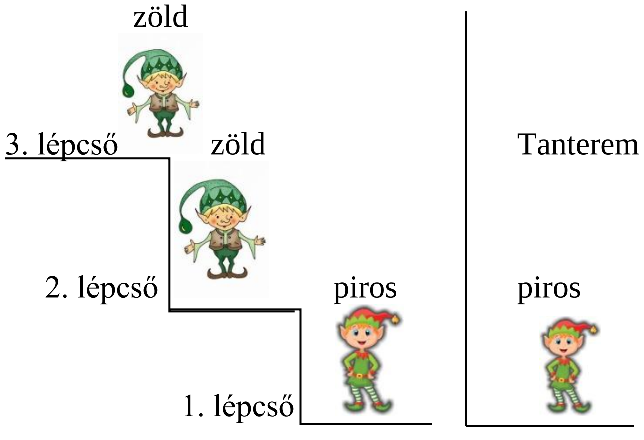
a) Hány éves kellett volna legyen az új vendég ahhoz, hogy az átlagéletkor 10 évre emelkedjen?
b) A tavalyi születésnapi bulin ugyanezek a vendégek voltak. Akkor a Zsófi édesanyjával együtt az átlagéletkor 12 év volt. Hány éves most Zsófi édesanyja?

Róka Sándor, Nyíregyháza és Kocsis Attila, Déva

Megoldás:

a) Legyen az eredeti létszám *n*. Ekkor a születésnapi bulin résztvevők életkorának összege $8 \cdot n + 13 = 9 \cdot (n+1)$, innen $n = 4$. Ha az új átlagéletkor 10 év, és az új vendég *A* éves, akkor $4 \cdot 8 + A = 5 \cdot 10$, $A = 18$.
b) Egy évvel ezelőtt az átlag életkor 8 év volt. Az öt vendég életkorának összege 40 év. Édesanyával együtt az átlag életkor 12 év, tehát a 6 személy életkorának összege $6 \cdot 12$ év =72 év Édesanya tavaly 72 év – 40 év = 32 év. Édesanya idén 33 éves.

4. feladat:



Egy emelkedő lépcsősor három egymás utáni lépcsőjén áll egy-egy bölcs manó, a negyedik bölcs manó pedig egy tanteremben tartózkodik, akit egyik bölcs manó sem lát, és nyílván az sem látja a többi hármat. (Lásd az ábrát.) A lépcsőn álló bölcs manók mindegyike csak lefele nézhet, és az alatta levő lépcsőkön levők sapkájának a színét látja.
Az a bölcs manó győz, aki legelőbb bemondja saját sapkájának színét.

Megjegyzések:
- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár

A bölcs manók nem fordulhatnak hátra, saját sapkájuk színét nem látják, azt nem vehetik le a fejükről, de mindegyikük tudja, hogy két zöld és két piros sapkájuk van összesen.
A manók gongütésre ha tudják, meg kell mondják, hogy milyen a saját fejükön levő sapka színe.
Első gongütésre a manók hallgatnak.
Második gongütésre egyikük jól válaszol.
Melyik bölcs manó helyében lennél, hogy nyerj? Fogalmazd meg miért!

Varga János, Székesfehérvár és Spier Tünde, Arad

Megoldás:
A második lépcsőn álló manó helyében lennék. Egyik manó sem tudja egyből megmondani saját sapkájának a színét, nagy csend lesz. Ebből következteti ki a 2. lépcsőn álló manó, hogy a felette álló azért nem szólalt meg, mert két különböző színű sapkát látott, vagyis az ő sapkájának színe különbözik az alatta állóétól. De mivel ő látja, hogy az alatta levő manó sapka színe piros, rögtön tudni fogja, hogy akkor az ő sapkájának a színe csakis zöld lehet, tehát ő fog győzni.

5. feladat:

Igazold, hogy:

$$\{3a+1 \mid a \in N\} \cap \{5b+3 \mid b \in N\} \cap \{7c+4 \mid c \in N\} = \{105d-17 \mid d \in N\}$$

Dr. Bencze Mihály, Bukarest és Fülöp Edith, Brassó

Megoldás 1

A metszet a közös elemeket tartalmazza
Legyen x = 3a + 1 = 5b + 3 = 7c + 4
x = 3a + 1 = 5b + 3 = 7c + 4 $\big| +17$
x + 17 = 3a + 18 = 5b + 20 = 7c + 21
x + 17 = 3(a + 6) = 5(b + 4) = 7(c + 3)
x + 17 = többszöröse 3-nak, 5-nek , 7-nek
x + 17 = 105d -ből következik x = 105d - 17

Megoldás 2

Legyen $x \in \{3a+1 \mid a \in N\} \cap \{5b+3 \mid b \in N\} \cap \{7c+4 \mid c \in N\} \Rightarrow$

x = 3a + 1 = 5b + 3 = 7c + 4

3a + 1 = 5b + 3 $\Rightarrow a = b + \dfrac{2(b+1)}{3} \Rightarrow b+1 = 3t \Rightarrow b = 3t-1$

$$x = 5b + 3 = 15t - 2 = 7c + 4 \Rightarrow c = 2t - 1 + \frac{t+1}{7} \Rightarrow t + 1 = 7k \Rightarrow t = 7k - 1$$

$$x = 15t - 2 = 15(7k - 1) - 2 = 105k - 17$$

6. feladat:

A 2016 számban az egyesek számjegye kétszerese az ezresek, százasok és tízesek számegyei összegének.

a) Hány négyjegyű évszám rendelkezik ezzel a tulajdonsággal? Sorold fel őket!
b) Hány évvel ezelőtt volt utoljára ezzel a tulajdonsággal rendelkező évszám?
c) Hány év telik el az első és az utolsó ilyen tulajdonsággal rendelkező évszám között?

Durugy Erika, Torda és Nagy Enikő, Nagyvárad

Megoldás:

a)

sorszám	Ezresek számjegye	Százasok számjegye	Tízesek számjegye	Egyesek számjegye
1	1	0	0	2
2	2	0	0	4
3	1	1	0	4
4	1	0	1	4
5	1	1	1	6
6	2	1	0	6
7	2	0	1	6
8	1	2	0	6
9	1	0	2	6
10	3	0	0	6
11	2	1	1	8
12	1	2	1	8
13	1	1	2	8
14	2	2	0	8
15	2	0	2	8
16	3	1	0	8
17	3	0	1	8
18	1	0	3	8
19	1	3	0	8
20	4	0	0	8

Táblázattal való felírás vagy képlet ((a+b+c) $\cdot$2=d) felírása 20 szám.

Megjegyzések:
- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár

b) A keresett évszám 2004
2016-2004= 12
c) Az első ilyen évszám: 1002
Az utolsó évszám: 4008
A két évszám közötti különbség: 4008-1002=3006