IV. ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY 5-8.
Országos szakasz, Temesvár, 2016. április 1 –3.
CONCURSUL DE MATEMATICĂ AL GIMNAZIILOR MAGHIARE

Etapa națională, Timișoara 1-3 aprilie 2016

6. osztály

1. feladat:

Koppány kistestvére és édesapja születésének évei között 32 esztendő telt el. Mindketten olyan évben születtek, amely felírható $P = 2^p\left(2^{p+1}-1\right)$ vagy $Q = 2^{p+1}\left(2^p-1\right)$ alakban, ahol p természetes szám. Melyik évben születtek?

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás:

Számítsuk ki a két év közötti különbséget:

$P-Q = 2^p\left(2^{p+1}-1\right)-2^{p+1}\left(2^p-1\right) = 2^{p+p+1}-2^p-2^{p+1+p}+2^{p+1} = 2^{p+1}-2^p = 2^p\left(2-1\right) = 2^p = 32 = 2^5$

innen $p=5$, azaz $P = 2^5\left(2^6-1\right) = 32\cdot 63 = 2016$ és $Q = 2^6\left(2^5-1\right) = 64\cdot 31 = 1984$.

2. feladat:

Egy négyzet minden oldalát 7 egyenlő részre osztjuk és az osztópontokat pirosra festjük. Határozzuk meg hány piros csúccsal rendelkező háromszög szerkeszthető?

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás:

Minden oldalon 6 osztópont található.

1.Háromszög szerkeszthető ha az egyik oldalon rögzítünk 2 pontot és egy másik pontot a megmaradt oldalakon. A két csúcspont 15 féleképpen választható ki az egyik oldalon a harmadik csúcspont a másik három oldalról 18 féleképpen, tehát a fenti gondolatmenet szerint 4·15·18=1080 háromszög szerkeszthető.
2.Egy más lehetőség, hogy három különböző oldalon vegyük fel a csúcspontokat. Ha rögzítünk 1 pontot az egyik oldalon, akkor összeköthető 6-6 ponttal egy-egy oldalról és mivel négy oldal van, 4·6·6·6=864 háromszöget kapunk.
Tehát összesen 1944 háromszöget kapunk.

IV. ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY 5-8.
Országos szakasz, Temesvár, 2016. április 1 –3.
CONCURSUL DE MATEMATICĂ AL GIMNAZIILOR MAGHIARE

Etapa națională, Timișoara 1-3 aprilie 2016

3. feladat:

Legyen H az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontja, A_1 az A pontból húzott magasság talppontja és $AB = CH$.

a) Igazold, hogy az AA_1C egyenlő szárú derékszögű háromszög!
b) Hány egyenlő szárú derékszögű háromszög keletkezett? Bizonyítsd be, hogy ezek mindenike egyenlő szárú derékszögű háromszögek!

Zákány Mónika, Nagybánya

Megoldás:a)

BAA_1 és BCC_1 szögek az ABC háromszög B szögének pótszögei, ezért egybevágó szögek. BAA_1 és HCA_1 háromszögek kongruensek, mivel derékszögűek és $AB = CH$.

Következik, hogy $CA_1 = AA_1$, vagyis a CAA_1 háromszög derékszögű egyenlőszárú.

b) Az a) alpont alapján az egyik ilyen háromszög AA_1C ,

A másik ilyen háromszög AB_1H mert $m\left(B_1\hat{A}H\right) = m\left(A\hat{H}B_1\right) = 45^\circ$

A harmadik ilyen háromszög HA_1B mert $B\hat{H}A_1$ és $B_1\hat{H}A$ csúcsszögek. Tehát 3 ilyen háromszög van.

IV. ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY 5-8.
Országos szakasz, Temesvár, 2016. április 1 –3.
CONCURSUL DE MATEMATICĂ AL GIMNAZIILOR MAGHIARE

Etapa națională, Timişoara 1-3 aprilie 2016

4. feladat:

a) Keresd meg azt a legkisebb számot, amelynek ugyanannyi osztója van, mint a 2016-nak.
b) Melyik nagyságrendileg a második olyan szám, amelynek ugyanannyi osztója van, mint a 2016-nak?

Róka Sándor, Nyíregyháza

Megoldás:

a) A $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ osztóiban a prímtényezők csak a 2, 3 és a 7 lehetnek. Ezek kitevői a 2 esetén 0, 1, 2, 3, 4, 5; a 3 esetén 0, 1, 2; és a 7 esetén 0 vagy 1 lehetnek. A lehetséges osztók száma így $6\cdot 3\cdot 2 = 36$.

$36 = 2\cdot 18 = 3\cdot 12 = 4\cdot 9 = 6\cdot 6 = 3\cdot 3\cdot 4 = 2\cdot 3\cdot 6 = 2\cdot 2\cdot 9 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3$ alapján a következő alakú számoknak van 36 osztója:

$p^{35},\ p\cdot q^{17},\ p^2\cdot q^{11},\ p^3\cdot q^8,\ p^5\cdot q^5,\ p^2\cdot q^2\cdot r^3,\ p\cdot q^2\cdot r^5, p\cdot q\cdot r^8, p\cdot q\cdot r^2\cdot s^2$, ahol *p, q, r, s* különböző prímek. Mindegyik prímtényezős alaknál a 2, 3, 5 és 7 prímekkel felírjuk a legkisebb számot, és közülük kiválasztjuk a legkisebbet. Ez a szám $p\cdot q\cdot r^2\cdot s^2 = 5\cdot 7\cdot 2^2\cdot 3^2 = 1260$.

b) a) alponthoz hasonlóan a nagyságrendileg következő szám $p\cdot q^2\cdot r^5 = 5\cdot 3^2\cdot 2^5 = 1440$.

5. feladat:

Az ABC háromszögben a C pontból húzott szögfelező az AB oldalt a D pontban metszi úgy, hogy $3AD = AB$. Legyen F az A pont CD szerinti szimmetrikusa.

a) Igazold, hogy az F pont rajta van a BC oldalon!
b) Ha a DFB háromszög F csúcsából húzott oldalfelező hossza egyenlő a (BD) hosszának felével, akkor számítsd ki a B szög mértékét!
c) Igazold, hogy az ABC háromszög derékszögű!

Kolumbán Anikó, Sepsiszentgyörgy, Czeglédi Csilla, Arad

Megoldás: tekintsük a következő ábrát:

a) $AE \perp CD$, $AE \cap CB = \{F\}$.

$AEC_{\Delta} \equiv FEC_{\Delta}$ (B.H.). Innen következik, hogy $(AE) \equiv (FE)$, tehát az A pont CD szerinti szimmetrikusa az F pont, ami rajta van a BC oldalon.

b) A CD oldalfelező merőleges, ebből következik, hogy $(AD) \equiv (DF)$.

Legyen FG az oldalfelező, akkor $(DF) \equiv (DG) \equiv (GF) \Rightarrow DFG_{\Delta}$ egyenlő oldalú, ezért $m\left(B\hat{G}F\right) = 120^{\circ}$. Mivel GBF_{Δ} egyenlő szárú háromszög $\Rightarrow m\left(\hat{B}\right) = 30^{\circ}$.

c) $CFD_{\Delta} \equiv CAD_{\Delta}$ (o.o.o.), innen $m(B\hat{F}G) + m(G\hat{F}D) = m(D\hat{F}C) = m(D\hat{A}C) = 90^{\circ}$, tehát az ABC_{Δ} derékszögű.

6. feladat:

Legyen M az $\{1, 2, 3, \ldots, 2016\}$ halmaz egy olyan részhalmaza, amelyik 675 elemet tartalmaz. Igazold, hogy az M halmaznak létezik két különböző eleme úgy, hogy összegük osztható legyen 6-tal!

Dr. Bencze Mihály, Bukarest

I. Megoldás:

Alkalmazzuk a reduction ad absurdum módszerét. Feltételezzük, hogy ha az M halmaznak bármely két különböző a és b elemét vesszük az összegük nem osztható 6-tal.

Minden természtes szám alakja a következő lehet: $6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5$. Mivel az $\{1, 2, 3, \ldots, 2016\}$ halmazban 2016 elem van, minden $6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5$ alakú természetes számból pontosan $2016 : 6 = 336$ darab van.

A $6k$ alakú számokból csak egy lehet az M halmazban.

A $6k+1$ *és a* $6k+2$ alakú számokból mind a 336 benne lehet az M halmazban.

A $6k+3$ alakú számokból csak egy lehet az M halmazban.

A $6k+4$ alakú számokból egy sem lehet benne az M halmazban, mert egy $6k+4$ alakú számhoz nem adhatunk hozzá egy $6k+2$ alakú számot. Hasonlóan a $6k+5$ alakú számokból egy sem lehet benne az M halmazban, mert egy $6k+5$ alakú számhoz nem adhatunk hozzá egy $6k+1$ alakú számot. Tehát összesen az M halmazban 674 elem lehet, ami elletmondás.