IV. ERDÉLYI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY 5-8.
Országos szakasz, Temesvár, 2016. április 1 –3.
CONCURSUL DE MATEMATICĂ AL GIMNAZIILOR MAGHIARE
Etapa națională, Timişoara 1-3 aprilie 2016

7. osztály

1. feladat: Az x és y pozitív valós számok esetén igazold, hogy:

a) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$;

b) ha $x+y>16$, akkor $(x+2)^2+(y+2)^2>200$.

Koczinger Éva, Szatmárnémeti

Megoldás:

a) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2 \Leftrightarrow x^2+y^2\geq 2xy \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0$

b) Ha $x+y>16$, akkor következik, hogy $x^2+2xy+y^2>256$

de $x^2-2xy+y^2\geq 0$ igaz bármely $x,y\in\mathbb{R}_+^*$ esetén.

A két egyenlőtlenséget összeadva kapjuk, hogy $2x^2+2y^2>256 \Rightarrow x^2+y^2>128$, melyből következik, hogy:

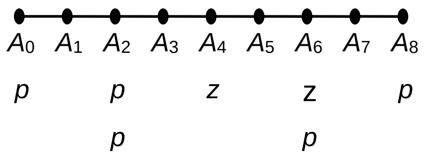
$(x+2)^2+(y+2)^2=x^2+y^2+4(x+y)+8>128+4\cdot 16+8>200.$

2. feladat: Az $[A_0A_8]$ szakaszt az A_1, A_2, ..., A_7 pontok kongruens szakaszokra osztják. Színezd ki az A_0, A_1, ..., A_8 pontokat úgy, hogy egyeseket pirossal, a többieket zölddel. Igazold, hogy létezik közöttük három azonos színű pont, amelyek közül az egyik pont a másik két pont által meghatározott szakasz felezőpontja!

Simon József, Csíkszereda

Megoldás

Megpróbáljuk úgy színezni a pontokat, hogy az állítás ne teljesüljön. Kiderül, hogy lehetetlen.



1. eset: ha A_0 és A_8 piros $\Rightarrow$ A_4 zöld. (ha A_4 piros lenne, akkor A_0, A_4 és A_8 azonos színűek lennének, A_4 pedig az $[A_0A_8]$ felezőpontja lenne)

A következő lépésben, ha A_2 és A_6 pirosak lennének, akkor A_1 és A_7 zöldek lennének, így A_1, A_4 és A_7 zöldek lennének, és az állítás igaz lenne.

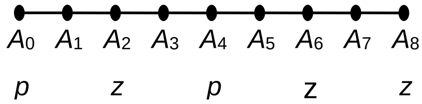
Ha pedig A_2 és A_6 zöldek lennének, akkor A_2, A_4 és A_6 lennének zöldek.

Nem marad más hátra, mint A_2 piros és A_6 zöld. (fordítva ugyanaz) $\Rightarrow$ A_5 piros $\Rightarrow$ A_2, A_5, és A_8 pirosak, A_5 pedig az $[A_2A_8]$ felezőpontja. Tehát létezik a fenti tulajdonsággal rendelkező három azonos színű pont.

Megjegyzések:

- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár

2. eset: ha A_0 piros és A_8 zöld, legyen A_4 piros (ha zöld lenne, akkor ugyanaz az eset lenne) $\Rightarrow$ A_2 zöld. A_6 nem lehet piros, mert akkor A_5 zöld, tehát A_2, A_5 és A_8 zöldek lennének. Így A_6 zöld $\Rightarrow$ A_7 piros.



A_1 nem lehet piros, mert akkor A_1, A_4 és A_7 piros lenne. A_1 tehát zöld $\Rightarrow$ A_3 piros $\Rightarrow$ A_5 zöld $\Rightarrow$ A_2, A_5 és A_8 zöldek a fenti tulajdonsággal. Tehát ebben az esetben is létezik a fenti tulajdonságokkal rendelkező három pont.

3. feladat: Egy 2016 x 2016-os négyzetrács minden négyzetét úgy töltsd ki, hogy az első sorában balról jobbra haladva írd be a mezőkbe sorba az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyeket, majd ezt addig ismételd, amíg a sor végére érsz. A második sorban ugyanígy járj el, csak az első mezőbe a 2-es számjegyet írd be, és innen folytasd a sor végéig. A harmadik sort a 3-as számjeggyel kezdd, és így tovább, amíg kitöltöd az egész rácsot.

a) Milyen számjegyek kerülnek a négyzetrács sarkaiba?
b) Hány darab lesz az egyes számjegyekből külön–külön a négyzetrácsban?
c) Igazold, hogy ha a négyzetrácsnak bármely két sarkát levágod, a megmaradt rész nem fedhető le 1 x 5-ös téglalapokkal!

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás:

a)

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	....
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	....
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	....
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	....
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	....
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	....
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	....
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	....
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	....
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

$2016 = 2015 + 1$ és $2015 = 403 \cdot 5 \Rightarrow$ az első sorban az $1, 2, 3, 4, 5$ számjegyeket 403-szor írjuk le, a végére 1- es kerül. Hasonlóan, az első oszlop utolsó számjegye ugyancsak 1-es. Az utolsó sor ugyanaz, mint az első, tehát a jobb alsó sarokba is 1-es kerül. Minden sarokban 1-es számjegy lesz.

b) Az utolsó sortól és oszloptól eltekintve minden számjegy $403 \cdot 2015$ - ször szerepel. A jobb alsó saroktól eltekintve minden számjegyből van még $403 \cdot 2$ darab.

Megjegyzések:
- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár

Összesen: a 2, 3, 4, 5 számjegyekből egyenként
$403 \cdot 2015 + 403 \cdot 2 = 403 \cdot 2017 = 86731$ darab van.
Az 1-esből 86732 darab van.

c) A sarkokból két darab 1-est levágva, az 1-esekből egy darabbal kevesebb lesz, mint a többiből. Következésképpen a lefedés lehetetlen

4. feladat: Ha $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, bizonyítsd be, hogy:

i) $(a^2+1)(b^2+1) = (ab-1)^2 + (a+b)^2$;

ii) $(a^2+1)(b^2+1) \geq 2|ab-1| \cdot (a+b)$;

iii) $\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{a+b} + \frac{(b^2+1)(c^2+1)}{b+c} + \frac{(c^2+1)(a^2+1)}{c+a} \geq 2 \cdot (|ab-1| + |bc-1| + |ca-1|)$.

Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás:
i) $(a^2+1)(b^2+1) = a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 = a^2b^2 - 2ab + 1 + a^2 + 2ab + b^2 = (ab-1)^2 + (a+b)^2$

ii) Felhasznáva az i) alpontot, valamint a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy:

$(a^2+1)(b^2+1) = (ab-1)^2 + (a+b)^2 \geq 2\sqrt{(ab-1)^2 \cdot (a+b)^2} = 2|ab-1| \cdot (a+b)$.

iii) Felhasználva a ii) alpontot

$\Rightarrow \frac{(a^2+1)(b^2+1)}{a+b} \geq 2|ab-1|$, $\frac{(b^2+1)(c^2+1)}{b+c} \geq 2|bc-1|$ és $\frac{(c^2+1)(a^2+1)}{c+a} \geq 2|ca-1|$.

összeadva az egyenlőtlenségeket $\Rightarrow$

$\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{a+b} + \frac{(b^2+1)(c^2+1)}{b+c} + \frac{(c^2+1)(a^2+1)}{c+a} \geq 2 \cdot (|ab-1| + |bc-1| + |ca-1|)$.

5. feladat: Az $ABCD$ négyzetben N a $[BC]$, M pedig a $[CD]$ oldal felezőpontja és $AN \cap BM = \{O\}$. Legyen $DE \perp BM, E \in BM$ és $AF \perp DE, F \in DE$. Igazold, hogy:

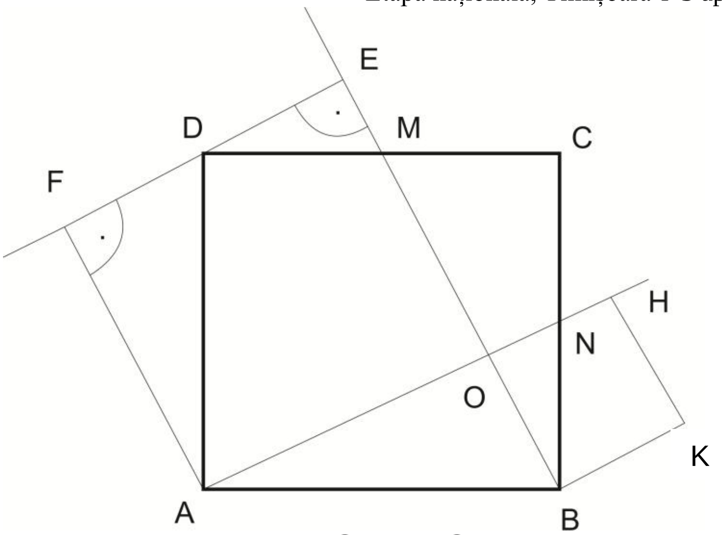
a) az $AOEF$ négyszög négyzet;

b) $T_{ABCD} = T_{AOEF} + T_{OBKH}$, ahol K és H a sík olyan pontjai, amelyekre $OBKH$ négyzet.

Császár Sándor, Csíkmadaras

Megoldás

Megjegyzések:
- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár



a) Mivel $[MC] \equiv [NB]$, $\widehat{MCB} \equiv \widehat{NBA}, [CB] \equiv [AB]$ (1. e.e.) $\Longrightarrow MCB_{\Delta} \equiv NBA_{\Delta} \Longrightarrow \widehat{MBC} \equiv \widehat{NAB}$.

$\widehat{AOE}, \widehat{OEF}$ és $\widehat{EFA}$ derékszögek $\Longrightarrow$ $AOEF$ téglalap. $AOB_{\Delta} \equiv AFD_{\Delta}$(átfogó, hegyesszög) $\Longrightarrow [FA] \equiv [AO] \Longrightarrow ABCD$ négyzet.

b) $T_{ABCD} = AB^2, T_{AOEF} = AO^2$ és $T_{OBKH} = OB^2$.

Az AOB háromszögben Pitagorasz tétele alapján: $AB^2 = AO^2 + OB^2$.

Innen következik, hogy $T_{ABCD} = T_{AOEF} + T_{OBKH}$.

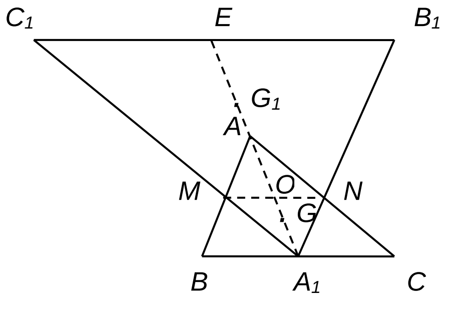
6. feladat: Az ABC háromszögben M, A_1 és N az AB, BC és AC oldalak felezőpontjai. Legyen $C_1 \in (A_1M$ és $B_1 \in (A_1N$ úgy, hogy $A_1C_1 = 2k \cdot A_1M$ és $A_1B_1 = 2k \cdot A_1N$, ahol $k \in \mathbb{N}^*$. Jelöld G-vel és G_1-gyel az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek súlypontjait! Legyen E a B_1C_1 szakasz felezőpontja.

a) Igazold, hogy az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek hasonlóak, és a hasonlósági arány k.
b) Igazold, hogy a G, G_1 és E pontok az AA_1 egyenesen vannak.
c) Számítsd ki az A_1E szakasz hosszát, ha $GG_1 = 46$ és $k = 12$.

Simon József, Csíkszereda

Megoldás

a) A feltevés alapján $\frac{A_1B_1}{A_1N} = \frac{A_1C_1}{A_1M} = 2k$ (1).



$[A_1M]$ és $[A_1N]$ az ABC_{Δ}középvonalai $\Rightarrow A_1B_1 \parallel AB$ és $A_1C_1 \parallel AC$ $\Rightarrow \widehat{B_1A_1C_1} \equiv \widehat{BAC}$ (párhuzamos szárú szögek) (2)

Az (1) és (2) összefüggésekből következik, hogy ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek hasonlóak. (2. eset).

$A_1N = \frac{AB}{2}$ és $A_1M = \frac{AC}{2}$. Az (1) összefüggésbe behelyettesítve $\Rightarrow \frac{A_1B_1}{\frac{AB}{2}} = 2k.$

b) AA_1 az ABC_{Δ} oldalfelezője $\Rightarrow G \in AA_1$. Az

Megjegyzések:
- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár

AMA_1N négyszög szemben fekvő oldalai párhuzamosak, tehát AMA_1N paralelogramma $\Rightarrow$ az AA_1 átló az MN átlót az O felezőpontjában metszi.
Az (1) összefüggésből következik, hogy $MN \parallel C_1B_1$.
Legyen $A_1O \cap B_1C_1 = \{F\}$. Az AFC_1 és AFB_1 háromszögekben felírjuk a hasonlóság alaptételét: $\frac{A_1O}{A_1F} = \frac{OM}{FC_1}$ és $\frac{A_1O}{A_1F} = \frac{ON}{FB_1} \Rightarrow \frac{OM}{FC_1} = \frac{ON}{FB_1} \Rightarrow FC_1 \equiv FB_1 \Rightarrow F = E \Rightarrow$
$E \in AA_1$, a G_1 súlypont viszont az A_1E oldalfelezőn van $\Rightarrow G_1 \in AA_1$.
c) $GA_1 = \frac{1}{3}AA_1$ és $G_1A_1 = \frac{2}{3}A_1E \Rightarrow GG_1 = G_1A_1 - GA_1 = \frac{2}{3}A_1E - \frac{1}{3}AA_1 = 46$. Mivel az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek hasonlóak $\Rightarrow A_1E = 12 \cdot AA_1$
$\Rightarrow \frac{24}{3}AA_1 - \frac{1}{3}AA_1 = 46 \Rightarrow 23 \cdot AA_1 = 46 \cdot 3 \Rightarrow AA_1 = 6 \Rightarrow A_1E = 6 \cdot 12 = 72.$

Megjegyzések:
- munkaidő 4 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár