8. osztály

1. feladat

Oldd meg a valós számok halmazán az $\begin{cases} x^2-9y+22=2\sqrt{z-4} \\ y^2-9z+22=2\sqrt{x-4} \\ z^2-9x+22=2\sqrt{y-4} \end{cases}$ egyenletrendszert!

dr. Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás: A négyzetgyökök miatt $x,y,z\geq 4$. Balra rendezve és összeadva az így kapott egyenleteket az

$$x^2-9x-2\sqrt{x-4}+y^2-9y-2\sqrt{y-4}+z^2-9z-2\sqrt{z-4}+66=0 \quad (*)$$

egyenlethez jutunk. Felhasználva, hogy

$$t^2-9t-2\sqrt{t-4}+22=t^2-10t+25+(t-4)-2\sqrt{t-4}+1=(t-5)^2+\left(\sqrt{t-4}-1\right)^2,\ \forall t\geq 4$$

a (*) egyenlet $(x-5)^2+\left(\sqrt{x-4}-1\right)^2+(y-5)^2+\left(\sqrt{y-4}-1\right)^2+(z-5)^2+\left(\sqrt{z-4}-1\right)^2=0$ alakba hozható. Mivel az összeg tagjai nemnegatívak, ezért egyenlőség csak $x=y=z=5$ esetén áll fenn. Tehát $M=\{(5,5,5)\}$.

2. feladat

Kiválasztottunk 15 egymásutáni természetes számot és összeadtuk őket, de egy számot kihagytunk az összeadásból, így az összeg 2016 lett. Melyik szám maradt ki?

dr. Kiss Sándor, Nyíregyháza

Megoldás: A 15 egymásutáni természetes szám legyen n, $(n+1)$, $(n+2)$, ... $(n+14)$, a kifelejtett szám pedig $n+k$. Ekkor felírhatjuk a következő egyenletet:

$$n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+14)-(n+k)=2016, \text{ ahol } k\in\{0,\ldots,14\}.$$

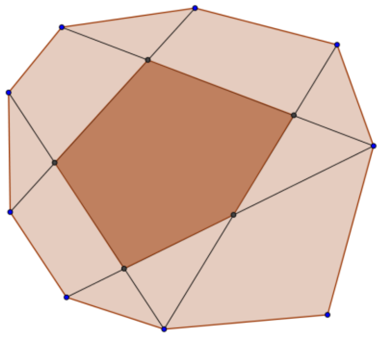
Elvégezve a számításokat a $15n+\dfrac{14\cdot 15}{2}-(n+k)=2016 \Leftrightarrow 14n+105-k=2016 \Leftrightarrow$ $14n-k=1911$ egyenlethez jutunk. Mivel $0\leq k\leq 14 \Leftrightarrow 0\geq -k\geq -14 \mid +14n$ ezért

$14n \geq 1911 \geq 14n-14$, azaz $1911 \leq 14n \leq 1925$, vagyis $n=137$, ahonnan $k=7$. Tehát a 144 maradt ki az összeadásból. Valóban $137+...+151-144=144\cdot 15-144=2016$.

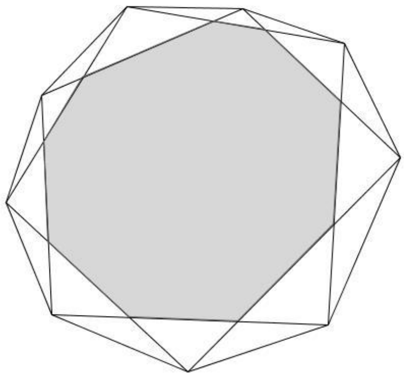
3. feladat:

Egy kilencoldalú konvex sokszög átlói is meghatároznak konvex sokszögeket. Egy példa az alábbi ábrán látható. Legfeljebb hány oldala van egy ilyen sokszögnek?

Róka Sándor, Nyíregyháza



Megoldás: A kilencoldalú konvex sokszögben keletkező sokszögek közül válasszunk egyet. Ez a sokszög konvex és egy oldala az eredeti sokszög egy átlóján fekszik. A kilencoldalú sokszög egy csúcsából – a konvexitás miatt – legfeljebb két olyan átló indulhat, amely a belső sokszögünknek is oldalát alkotja. Mivel minden átlónak két végpontja van, ezért a belső sokszög oldalainak száma legfeljebb $\frac{2\cdot 9}{2}=9$, ami elérhető. Lásd az ábrát!



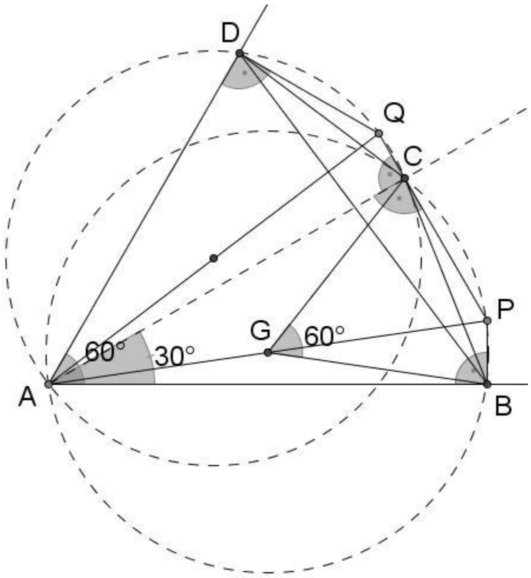
4. feladat

Jelölje A egy 60°-os szög csúcsát és legyen az $[AC$ félegyenes a szög szögfelezője. Az A szög belső tartományában, a szögfelező két különböző oldalán tekintsük a P illetve Q pontokat úgy, hogy $PQ \perp CA$ és $AC \cap PQ = \{C\}$. Legyen B és D a P illetve Q pontokból az eredeti szög száraira húzott merőlegesek talppontja.

Igazold, hogy $AP+AQ>2\cdot BD$.

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás: Tekintsük a mellékelt ábrát. Mivel az ABP és ACP derékszögű háromszögek, a B és C pontok rajta vannak az AP átmérőjű körön. Jelölje ennek középpontját G. Mivel $m(BAC)=30°$, ezért a $m(BGC)=60°$, mert középponti szög. Mivel GB és GC sugarak, a BGC háromszög egyenlő oldalú, tehát $[BC]\equiv[GC]$. Mivel AP átmérő, ezért $AP=2\cdot BC$. Hasonlóan igazoljuk, hogy $AQ=2\cdot CD$. Innen következik, hogy $AP+AQ=2\cdot BC+2\cdot CD>2\cdot BD$.



5. feladat

Az $ABCD$ téglalapban $AB=2AD$. A téglalap síkjára merőlegesen felvesszük az EAB, FBC, GCD és HAD egyenlő szárú derékszögű háromszögeket úgy, hogy az első kettő a téglalap síkja alatt, az utolsó kettő pedig a téglalap síkja fölött helyezkedik el. A derékszögű háromszögek átfogói a téglalap oldalai.

Igazold, hogy a) az $EFGH$ négyszög téglalap

b) $GH\perp(HED)$

Simon József, Csíkszereda

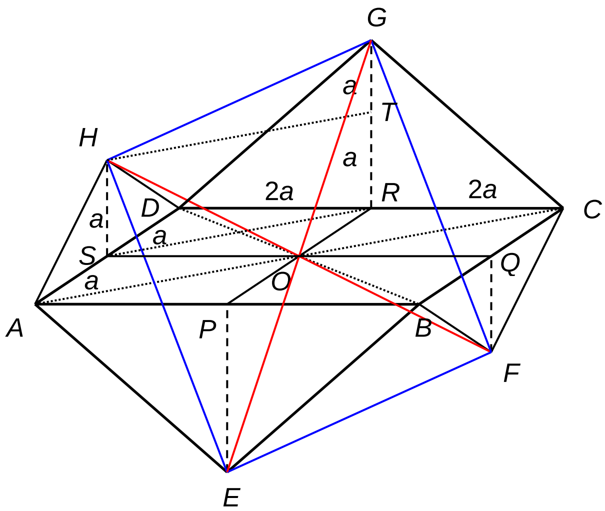
Megoldás:

a) Legyen O az $ABCD$ téglalap középpontja, P, Q, R és S pedig a téglalap AB, BC, CD és DA oldalainak felezőpontjai.

$[EP]$ és $[GR]$ az EAB és GCD kongruens háromszögek magasságai $\Rightarrow$ $EP\parallel GR$ és $[EP]\equiv[GR]$ $\Rightarrow EPGR$ paralelogramma

$\Rightarrow$ az $[EG]$ és $[PR]$ átlók felezik egymást, az $ABCD$ téglalap O középpontjában metszik egymást.

Hasonlóan a $HSFQ$ négyszög is paralelogramma, az $[SQ]$ és $[HF]$ átlók felezik egymást, és ugyancsak az O pontban metszik egymást.



Tehát $HF\cap EG=\{O\}$ és $[EO]\equiv[OG]$ és $[HO]\equiv[OF]$ $\Rightarrow EFGH$ paralelogramma.

Tudjuk, hogy $HS=\dfrac{AD}{2}$ és $GR=\dfrac{DC}{2}$ $\Rightarrow$ $[HS]\equiv[OR]$ és $[OS]\equiv[GR]$ $\Rightarrow$ $HSO\triangle\equiv ORG\triangle$

(*befogó-befogó eset*) $\Rightarrow$ $[GO]\equiv[HO]$ $\Rightarrow$ $[GE]\equiv[HF]$ $\Rightarrow$ $EFGH$ téglalap.

b) Legyen $AD = 2a$ és $DC = 4a \Rightarrow HD = a\sqrt{2}$ és $GD = 2a\sqrt{2}$. A $HSRG$ derékszögű trapézban legyen $HT \parallel SR$, ahol $T \in GR$. $HT = SR = \sqrt{DS^2 + DR^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$, $GH = \sqrt{HT^2 + GT^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{5}\right)^2 + a^2} = a\sqrt{6}$. A HDG háromszögben fennáll a $GD^2 = HD^2 + HG^2$, mert $\left(2a\sqrt{2}\right)^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{6}\right)^2$, Pitagorasz tételének fordított tételéből következik, hogy $GH \perp HD$. Tudjuk, hogy $GH \perp HE \Rightarrow GH \perp (HED)$.

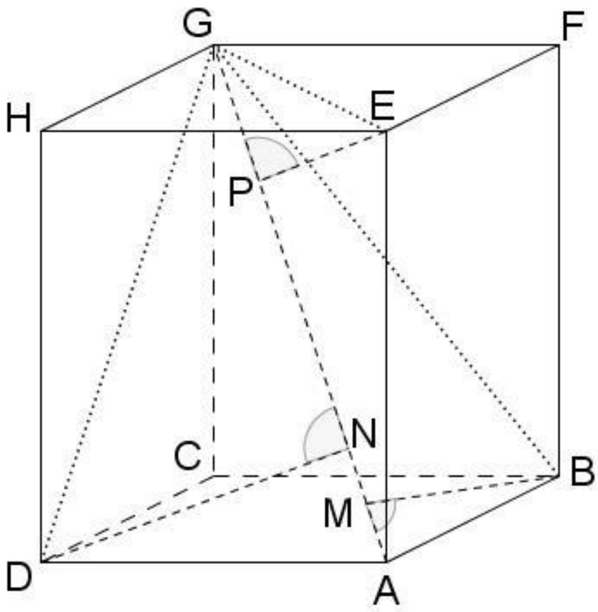
6. feladat

Az $ABCDEFGH$ téglatestben legyen $AB = a$, $BC = b$ és $AE = c$, valamint jelölje M, N és P a B, D illetve E pontok merőleges vetületét az AG testátlóra.

Igazold, hogy $\sqrt{\dfrac{AM}{MG}} + \sqrt{\dfrac{AN}{NG}} + \sqrt{\dfrac{AP}{PG}} > 2$.

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás: Az $ABCDEFGH$ téglatestben az ABG, ADG illetve azAEG derékszögű háromszögek. Az ABG háromszögben legyen $M = pr_{AG}(B)$, alkalmazva a befogó tételét kapjuk, hogy $AB^2 = AM \cdot AG$ illetve $BG^2 = GM \cdot AG$, ahonnan $\dfrac{AB^2}{BG^2} = \dfrac{AM \cdot AG}{GM \cdot AG}$. A jelöléseket felhasználva kapjuk, hogy $\dfrac{AM}{MG} = \dfrac{a^2}{b^2 + c^2}$. Hasonló gondolatmenetet alkalmazva az ADG illetve az AEG háromszögekben $\dfrac{AN}{NG} = \dfrac{b^2}{a^2 + c^2}$ illetve $\dfrac{AP}{PG} = \dfrac{c^2}{a^2 + b^2}$.



Ekkor a feladatban megadott egyenlőtlenség a következő alakban írható:

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2 + c^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2 + c^2}} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2 + b^2}} > 2$$

A bal oldali összeg minden tagjára alkalmazva a mértani és harmonikus középarányosok közötti $\sqrt{x \cdot y} \geq \dfrac{2xy}{x + y}$, $\forall x, y > 0$ egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\sqrt{1\cdot\frac{a^2}{b^2+c^2}} \geq \frac{2\cdot\frac{a^2}{b^2+c^2}}{1+\frac{a^2}{b^2+c^2}} \Rightarrow \sqrt{1\cdot\frac{a^2}{b^2+c^2}} \geq \frac{2a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\sqrt{1\cdot\frac{b^2}{a^2+c^2}} \geq \frac{2b^2}{a^2+b^2+c^2}\text{, illetve } \sqrt{1\cdot\frac{c^2}{a^2+b^2}} \geq \frac{2c^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Összeadva a kapott egyenlőtlenségeket következik, hogy

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2+c^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2+b^2}} \geq 2\text{, vagyis } \sqrt{\frac{AM}{MG}}+\sqrt{\frac{AN}{NG}}+\sqrt{\frac{AP}{PG}} \geq 2.$$

Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $\frac{a^2}{b^2+c^2}=\frac{b^2}{a^2+c^2}=\frac{c^2}{a^2+b^2}=1$, ahonnan $a^2=b^2+c^2$, $b^2=a^2+c^2$ és $c^2=a^2+b^2$, összeadva kapjuk, hogy $a^2+b^2+c^2=0$, ami lehetetlen, tehát

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2+c^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2+b^2}} > 2.$$